1) Pol. ekvation

$$f(x)=0$$

reella koefficienter

$$f(\alpha)=0 \implies$$

dec 10-09:54

$$\overline{f(\alpha) = 0}$$

$$\Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0$$

eftersom koeff. är reella

$$\overline{\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i\right)} =$$

dec 10-09:55

$$= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,\overline{\alpha}^{\,i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^{\,i}$$

eftersom $\overline{a_i} = a_i$

då $a_i \in \mathbb{R}$.

dec 10-09:55

Summan av rötterna är 11

$$z^3-11z^2+43z-65=$$

$$=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)$$

$$=z^3-z^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$$
$$+z(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)$$

dec 10-09:55

$$-\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3+2i+3-2i$$

$$= 6$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 11-6 = 5$$

dec 10-09:55

2 b)

$\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \in \mathbb{R}^4$

är linj. oberoende

om

$x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3 = 0$

har en unik lösning

$x = y = z = 0.$

dec 10-09:55

<u>alt</u>. ingen av dem

är en linjär-

kombination av

de andra.

dec 10-10:34

2a) Kolla om det finns unik lösning till

$$x\begin{pmatrix}1-t\\0\\1\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\6-t\\0\\2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\4\\1\\3\end{pmatrix}=0$$

?

dec 10-10:35

Lös med G.E

på totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-t & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6-t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$\sim$

dec 10-10:36

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1-t & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6-t & 4 & 0 \end{array}\right) \quad (-1) \quad (t-1)$$

$$(-1) \quad \sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & t & 0 \\ 0 & 6-t & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

dec 10-10:37

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & -2+t & 0 \end{array}\right) \quad -1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

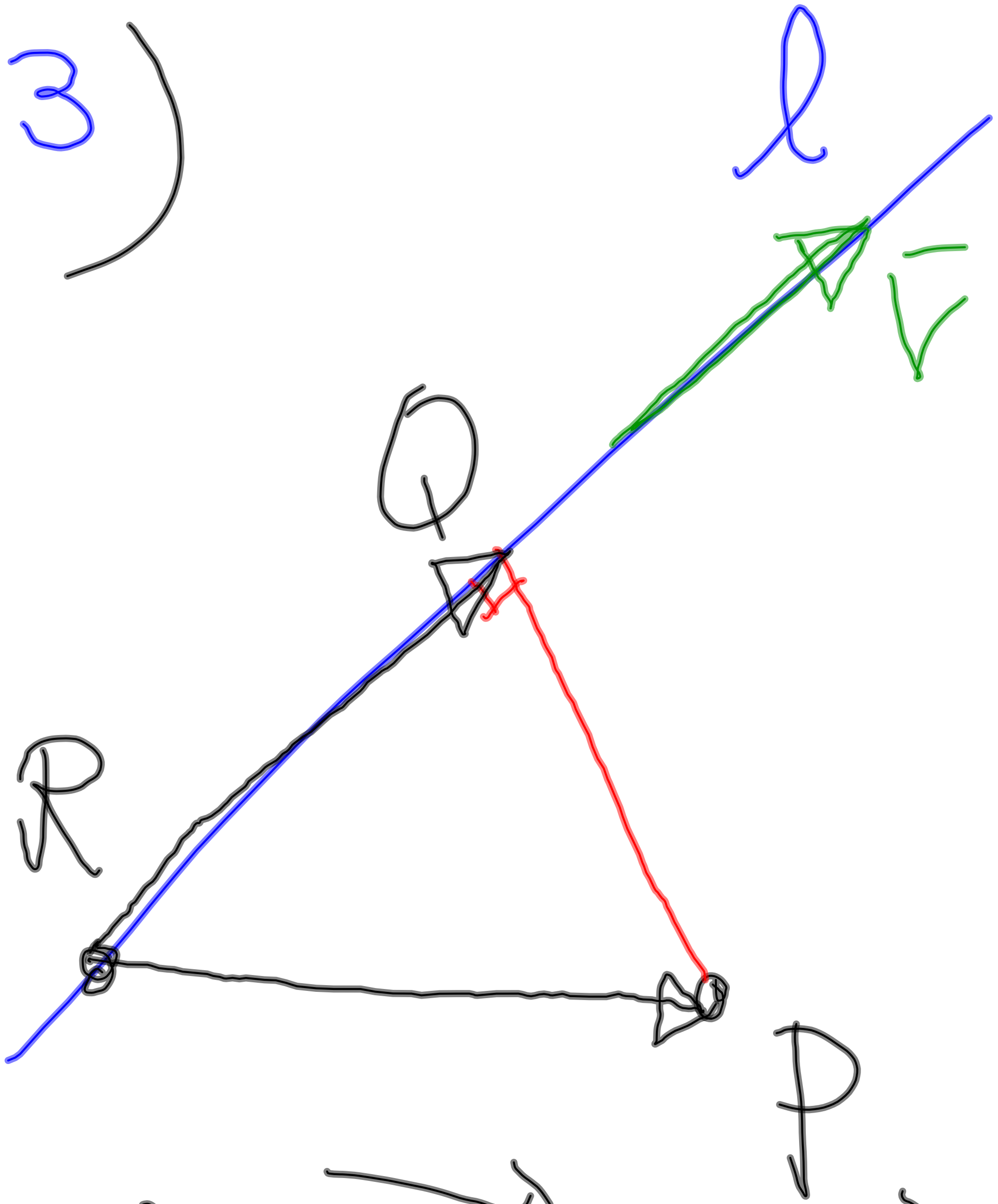
dec 10-10:41

Alltså finns unik lösning precis om $t \neq 2$.

Svar: Vektorerna är linj. ober. om och endast om $t \neq 2$.

dec 10-10:44

3)



$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ}$$

dec 10-11:08

där $\overrightarrow{RQ} = \mathrm{Proj}_{\bar{v}} \overrightarrow{RP}$

$$= \frac{\bar{v} \cdot \overrightarrow{RP}}{\bar{v} \cdot \bar{v}} \bar{v}$$

I praktiken:

- Finn R på linjen
- Beräkna $\overrightarrow{RP} =$
  $= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$

dec 10-11:11

- Beräkna proj. $\overrightarrow{RQ}$

- Beräkna

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ}$$

dec 10-11:12

5 Generell metod:

- Ställ upp karakt. ekvationen
- Lös den!
- Hitta egenvekt.

dec 10-11:19

genom G.E
på totalmatrisen

$$\left(A - aI \,\middle|\, 0 \right)$$

En av raderna
ska bli noll!

dec 10-11:20

b) $A\bar{u} = a\bar{u}$

$\bar{u} \neq 0 \Rightarrow$

det finns icke-triviala lösningar till

$$\left(A - aI \;\middle|\; 0\right)$$

dec 10-11:22

$\Rightarrow \det(A - aI) = 0$

$\Rightarrow$ a är en lösning till kar. ekv.

dec 10-11:23

6 a)

Linjär =

= bevarar addition och multiplikation med skalär

dvs:

dec 10-11:24

$$T(\bar{u}+\bar{v}) =$$

$$T(\bar{u}) + T(\bar{v})$$

och

$$T(a\bar{u}) = aT(\bar{u})$$

$$\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}$$

dec 10-11:25

6b) Se på vad $\bar{T}$ gör med standardbasvektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$

dec 10-11:28

Hur får vi $T(\bar{e}_1)$?

Vi vet att

$$T(\bar{e}_1) - T(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) + 2T(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

dec 10-11:29

$$T(\bar{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + T(\bar{e}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2T(\bar{e}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

dec 10-11:32

Matrisen ges av

$$A = \begin{pmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & T(\bar{e}_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 7 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

dec 10-11:33

7.) Är

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisen

${}_F P_G$ eller ${}_G P_F$?

dec 10-11:36

Testa med

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F$$

Om $T = {}_G P_F$

Så ska vi få

$$(\bar{f}_1)_G = {}_G P_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\bar{F}}$$

dec 10-11:38

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Är detta $(\bar{f}_1)_G$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nej!

dec 10-11:40

Alltså måste

$$T = {}_F P_G$$

Alltså får vi

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_G \text{ omvandlas}$$

dec 10-11:42

till

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 2b+c \\ a+2c \\ 2a+b \end{pmatrix}_{F}$$

dec 10-11:43

b) Vi får

$$ {}_G P_F = \left({}_F P_G \right)^{-1} = $$

$$ = T^{-1} $$

dec 10-11:45